**Exercice n°0**    **Questionnaire culturel**

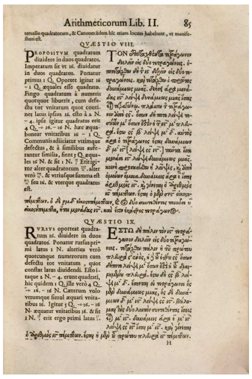
# Pierre de Fermat et son grand théorème arithmétique.

**Le droit pour le métier, les mathématiques pour le plaisir.**

Pierre de Fermat est né en ______, à ________________________________, non loin de Toulouse et Montauban.

Il y fit des études secondaires classiques suivies d'une inscription en ______ à l'université de Toulouse. Il fit une « pause dans ses études » à Bordeaux où il se lia avec des gens férus de mathématiques et découvrit alors les œuvres de François _______. Il commença dès 1630 à correspondre avec des mathématiciens, ce qu'il fera ensuite tout au long de sa vie en mathématicien amateur génial.

En 1631 il obtint une licence de droit à l'université d'__________. Il entama ensuite une carrière de magistrat. Il s'y montra consciencieux et ambitieux et occupa plusieurs postes importants.
Cela n'interrompit jamais son activité scientifique. Il ne cessa pas de correspondre par lettres avec de nombreux savants européens, notamment l'abbé Marin Mersenne, « correspondant » de L'Europe savante.
C'est ainsi qu'il fut en lien avec _________________ pour fonder le calcul des _______________. Il créa une méthode ingénieuse pour l'étude des extrema de fonctions et polémiqua avec René Descartes à ce sujet comme au sujet de la réfraction en optique. Il reçut sur ces points le soutien de Christiaan Huygens, savant des Provinces-Unies.
Il est considéré comme l'un des pères du calcul infinitésimal actuel : il y montre son savoir-faire dans les calculs d'aires et de volumes. Sa grande maîtrise du latin et du grec le mena à une étude poussée des rééditions des auteurs grecs tels qu'ils avaient été transmis par les savants arabes.


Arithmeticorum Lib. II. 85

teruallo quadratorum, & Canones iidem hic etiam locum habebunt, vt manifestum est.

QVÆSTIO VIII.

PROPOSITVM quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum sit vt 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 − 1 Q. æquales esse quadrato. Fingo quadratum à numeris quotquot libuerit, cum defectu tot vnitatum quot continet latus ipsius 16. esto à 2 N. − 4. ipse igitur quadratus erit 4 Q. + 16. − 16 N. hæc æquabuntur vnitatibus 16 − 1 Q. Communis adiiciatur vtrimque defectus, & à similibus auferantur similia, fient 5 Q. æquales 16 N. & fit 1 N. 16/5. Erit igitur alter quadratorum 256/25. alter verò 144/25. & vtriusque summa est 400/25 seu 16. & vterque quadratus est.

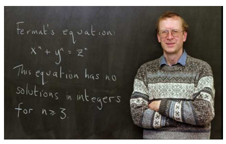
QVÆSTIO IX.

RVRSVS oporteat quadratum 16. diuidere in duos quadratos. Ponatur rursus primi latus 1 N. alterius verò quotcunque numerorum cum defectu tot vnitatum, quot constat latus diuidendi. Esto itaque 2 N. − 4. erunt quadrati, hic quidem 1 Q. ille verò 4 Q. + 16. − 16 N. Cæterum volo vtrumque simul æquari vnitatibus 16. Igitur 5 Q. + 16. − 16 N. æquatur vnitatibus 16. & fit 1 N. 16/5 erit ergo primi latus 16/5.

H

C'est à la lecture d'une réédition, en grec avec traduction en latin, de ________________________________ par Claude Gaspard Bachet de Méziriac qu'il écrivit dans la ________ l'énoncé de ce qui allait devenir son plus grand théorème arithmétique :
« Il est impossible de partager soit un cube en deux cubes, soit un bicarré en deux bicarrés, soit en général une puissance quelconque supérieure au carré en deux puissances de même degré ; j'en ai découvert une démonstration merveilleuse que cette marge est trop étroite pour contenir. »
Compte tenu du contexte, ceci se traduit en termes actuels par :
« l'équation____________ = ____ n'a pas de solutions en nombres entiers strictement positifs pour n>2 » .
Il faut souligner qu'il était dans l'habitude des correspondances de l'époque de ne pas dévoiler tout de suite les démonstrations comme s'il s'agissait d'un jeu à énigmes. De plus, peut-être pour s'éviter des lettres trop longues, les démonstrations laissaient toujours des vides dans les détails techniques supposés déjà acquis !
En tout cas, Fermat était coutumier du fait et ses théorèmes annoncés s'étaient toujours révélés justes.

**Un vrai défi durant trois siècles et demi.**

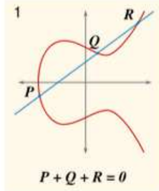



Ce grand théorème allait aiguillonner les esprits de ______, date de son énoncé, jusqu'à sa démonstration complète par le mathématicien britannique __________________.

Il ne faut pas croire que le problème avait été mis de côté. Au contraire, il fut un moteur permanent de recherche pour des générations de mathématiciens qui y progressèrent pas à pas, utilisant ou même créant de nouveaux objets et de nouvelles démarches mathématiques pour cela. Il devint au fil des ans un véritable enjeu scientifique, à tel point qu'en 1816 l'Académie des Sciences de Paris offrit une médaille d'or et un prix de 3.000 francs or à qui résoudrait la question. Plus tard, Paul Wolfskehl, industriel allemand amateur de mathématiques, renonça au suicide qu'il avait programmé à minuit exactement, trop passionné par un article de Kummer sur le grand théorème de Fermat et retrouva ainsi goût à la vie. En reconnaissance, il légua de quoi fonder en 1908 un prix de 100.000 marks à qui le résoudrait avant 100 ans ! Wiles le reçut en 1997 !

**Une démarche longue et lente mais fructueuse.**

Pendant trois siècles, les seules avancées ne furent effectuées que pour des cas particuliers. Elles furent le fait de grands mathématiciens tels que Leonhard Euler, Sophie Germain, Adrien-Marie Legendre ou Johann Peter Gustav-Dirichlet. En 1857 Ernst Kummer démontra que le théorème était vrai pour tous les n<100.

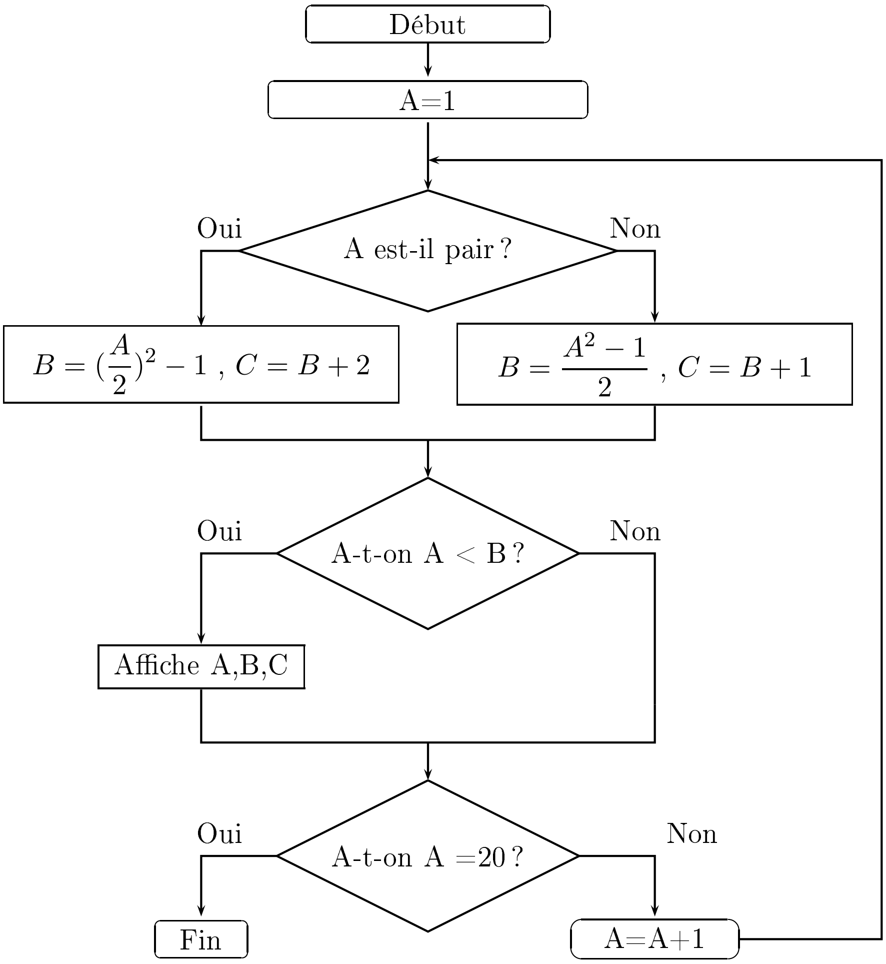



La principale avancée pour parvenir à la fin fut l'introduction en 1955 de courbes liées au problème par le japonais Yutaka Taniyama. L'étude, à partir de ces courbes, dites elliptiques, fut développée par des mathématiciens tels qu'André Weil, Goro Shimura, Gerard Frey et Kenneth Ribet.

Il revint au britannique Andrew Wiles de démontrer complètement le théorème. Il annonça la réussite en 1993 au bout de sept années de travail mené en secret mais reconnut peu après une erreur. Il faillit abandonner, vraiment découragé, puis poussé et aidé par ____________________, il parvint au résultat en ______. L'une de ses idées géniales fut de recourir en plus à la théorie d'Evariste Galois sur les équations.
Il est intéressant de signaler que, d'après Wiles, le désir de résoudre le problème est né le jour où, à dix ans, il lut l'énoncé du théorème de Fermat dans un livre arithmétique consulté dans une bibliothèque. Le but était facile à comprendre mais la construction de la démonstration ardue !

**Théorème de Fermat et triplets Pythagoriciens.**

On souhaite déterminer des triangles rectangles dont les mesures des côtés sont des nombres entiers strictement positifs. On propose l'algorithme suivant pour en obtenir sous la forme (A,B,C) où A<B et 0<A≤20.




1. Faire fonctionner cet algorithme et vérifier que les triplets obtenus sont bien les longueurs des côtés d'un triangle rectangle, c'est à dire des triplets Pythagoriciens.
2. L'algorithme ne donne pas toutes les solutions possibles pour A≤20, le triplet (20,21,29) est une solution « oubliée », en donner une autre.